Université Paris–Diderot (Paris 7) MT1–MM1
L1, Sciences exactes 2012–2013

Examen de seconde session du 17 juin 2013

Durée : 3 heures.
Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1. ***Questions de cours***

1. Qu'est-ce que le *degré* d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$?
2. Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$?
3. Donner la définition d'une *racine d'ordre p* d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$?
4. Déterminer, dans $\mathbb{C}$, les racines des polynômes $P(X) = X^5 - 1$ et $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. Préciser leur multiplicité puis factoriser sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, les polynômes $P(X) = X^5 - 1$ et $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

Exercice 2.

1. Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$. Qu'appelle-t-on *dimension* d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^n$?

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), on note $v = (2, 3, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$ et on considère les sous-ensembles

$$E := \{(x, y, z) \,|\, -3x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad F := \{(x, y, z) \,|\, x + y - z = 0\}.$$

2. Pour chacun des ensembles suivants, dire en justifiant votre réponse s'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou non : E, F, $E \cap F$, $E \cup F$, $E + F := \{e + f \,|\, e \in E, f \in F\}$.
3. Donner les dimensions de E et F respectivement.
4. Trouver une base, que l'on notera $\mathcal{B}_0$ de $E \cap F$ et donner la dimension de $E \cap F$.
5. Soit $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_0 \cup \{v\}$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de E.
6. Soit $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_0 \cup \{w\}$. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de F.
7. Montrer que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Soient A et B deux réels. On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2\,A\,x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ \dfrac{B^2}{1 + x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de A et B la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de A et B, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Dans cet exercice a, b sont des nombres réels tels que $a < b$.

1. Enoncer le Théorème de Rolle.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $[a,b]$ telle que sa dérivée f' soit aussi continue et dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer que la fonction g définie pour tout x dans $[a,b]$ par :

$$g(x) = (f'(x) - f(x))\, e^x,$$

satisfait aux conditions du Théorème de Rolle.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f''(c) = f(c).$$

Exercice 5.
Dans cet exercice, α désigne un nombre réel tel que $\cos(\alpha) \neq 0$.

1. Rappeler les définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe $z \neq 0$.
2. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $-i$.
3. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe z_0 donné par :

$$z_0 = \frac{1 + i\,\tan(\alpha)}{1 - i\,\tan(\alpha)}.$$

4. Trouver les nombres réels α vérifiant l'équation :

$$\left(\frac{1 + i\,\tan(\alpha)}{1 - i\,\tan(\alpha)}\right)^2 = -i.$$

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-x} + e^{-2x}\right)$ et la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

On note $I = [0,1]$ et on note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$, et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans I. **On note α ce nombre.**
3. Montrer que l'équation $x = f(x)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R} \setminus I$. En déduire que α est en fait l'unique solution de cette équation dans $\mathbb{R}$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x < y$. Enoncer le théorème des accroissements finis pour l'application f sur $[x,y]$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

6. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?